|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Место занятия в расписании** | | **Тема** | **Цели** | | **Задачи** | **Контрольные вопросы и задания** | **Д/з** |
| Дата | 08.11.21 | **Функция одной переменной. Граница функции. Понятие производной и техника дифференцирования.** | Дидактическая | Обобщить систематизировать и расширить основные понятия функции одной переменной, границы функции, понятие производной функции одной переменной, продолжить формирование умений и навыков решения задач на функцию одной переменной, вычисления производной функции одной переменной. | 1) Обобщить систематизировать и расширить теоретические знания о функции одной переменной и её границе.  2) Рассмотреть примеры решения задач в рамках данной темы.  3) Обобщить систематизировать и расширить теоретические знания о производной функции одной переменной.  4) Продолжить формирование умений и навыков решения задач в рамках данной темы. | 1) Как определяется и как задается функция?  2) По какой переменной находится область определения?  3) Какие по виду бывают функции?  4) Какие основные свойства функции вы знаете?  5) Как определяется граница функции и когда она существует?  6) | **Изучить и составить конспект, решить задание:**  **№1.**  **Найти производные функций:** |
| Группа | 2ТО | Развивающая | Развивать логическое и пространственное мышление. |
| Пара | IV | Воспитательная | Воспитывать любознательность и самостоятельность. |
| № занят. | 21-22  (объединяются занятия №21 и №22) |

Подтвердите своё присутствие на занятии. Составьте конспект в соответствии с требованиями при помощи опорного конспекта занятия и учебника Элементы высшей математики/ Г.В.Григорьев и др. - М.: ИЦ Академия, 2014 г. - 320 с. (ссылка на электронный учебник: https://cloud.mail.ru/public/buNn/ijFYgVJ6h). Фото конспекта отправьте на почту **elenabragina7@gmail.com** до 08.11.21 включительно. Работа должна быть выполнена в рамках рабочего времени, отведенного на занятие по математике. **Чтобы все формулы и символы открывались, необходимо файл скачать на рабочий стол.**

**08.11**

**Функция одной переменной. Граница функции. Понятие производной и техника дифференцирования.**

**1) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков и блочное закрепление. Определим функцию одной переменной и способы её задания (записать конспект).**

**Определение.** Функция одной переменной - это зависимость переменной у от переменной х, при которой каждому значению переменной х ставиться в соответствие единственное значение переменной у.

Алгебраически эту зависимость можно задать формулой у = f(х), где

х - независимая переменная или аргумент,

у - зависимая переменная или функция,

f - формула с переменной х.

В качестве аргумента и функции можно использовать и другие буквы.

**Функцию можно задать:**

- аналитически или алгебраически (формулой),

- таблично (таблицей значений аргумента и функции),

- графически (графиком),

- словесно (зависимость описывается при помощи слов).

Рассмотрим несложные примеры на определение и задание функции.

**Пример 1.**

Найти f(1,2), если f(х) = .

Решение.

Подставим в формулу функции вместо переменной х значение 1,2:

f(1,2) = = = = (поставим минус перед дробью, умножим числитель и знаменатель на 10) = - = (сократим на 2) = - .

**Пример 2.**

Найти f(), если f(х) = .

Решение.

Подставим в формулу функции вместо переменной х значение :

f() = = = (представим целые числа в виде дроби со знаменателем 7) = = = (сократим на знаменатели) = .

**2) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков и блочное закрепление. Определим область определения функции и область её значений (записать в конспект).**

Область определения D и область значений Е являются важнейшими характеристиками или свойствами функции. Определим их.

**Определение.** Областью определения D функции у = f(х) называется множество значений переменной х, при которых функция существует (считается).

**Определение.** Областью значений Е функции у = f(х) называется множество значений переменной у, которые она принимает.

При нахождении области определения функции учитываются особенности формулы функции и её определение, применяются умения и навыки решения уравнений, неравенств, систем.

**Пример 3.**

Найти область определения функции у = .

Решение.

Функция логарифмическая и по определению мы знаем, что основание логарифма >0 и ≠ 1, а выражение под знаком логарифма >0. Составим систему условий, при которых функция существует:

**х**>0 **х**>0 **х**>0

х≠ 1 х≠ 1 х≠ 1

4х-8>0 4х>8 х>2

Изобразим промежуток, соответствующий общему решению системы:

**0 1 2 х**

**D(у) = (2;+∞).**

**3) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков. Определим виды функций (записать в конспект).**

Функции могут быть алгебраическими и трансцендентными.

**Определение.** Функция называется алгебраической, если её формула составлена при помощи алгебраических действий.

В противном случае функцию называют трансцендентной.

К трансцендентным функциям относятся функции, содержащие логарифмы и тригонометрические функции.

Функции могут быть явными (когда в формуле функция выражена через аргумент), неявными (когда в формуле функция не выражена через аргумент), заданными параметрически в виде х = f(t), y = g(t)).

**4) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков. Рассмотрим основные свойства функции (ознакомиться).**

**К основным свойствам функции относятся следующие свойства:**

**1. Нули функции**.

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

**2. Промежутки знакопостоянства функции**.

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

**3. Монотонность функции**.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

**4. Четность (нечетность) функции**.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **х** из области определения выполняется равенство **f(-x) = f(x)**. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **х** из области определения справедливо равенство **f(-x) = - f(x**). График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

**5. Ограниченная и неограниченная функции**.

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что |f(x)| ≤ M для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

**6. Периодичность функции**.

Функция f(x) - периодическая, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции имеет место: f(x+T) = f(x). Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

**5) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков. Определим границу функции (записать в конспект).**

**Определение (по Коши).** Пусть функция f(x) определена на некотором открытом интервале X, содержащем точку x=a. (При этом не требуется, чтобы значение f(a) было обязательно определено.)Число А называется *пределом* функции f(x) при x→a, если для каждого ε>0 существует такое число δ>0, что|f(x)−А|<ε,при условии0<|x−a|<δ.Данное определение предела известно как ε−δ− определение или определение *Коши*.

Обозначается C:\Users\Елена\Desktop\image169.png

Символом lim

x→a−0

обозначается левосторонний предел, в котором переменная x, приближаясь к a, принимает значения x<a. Соответствующий предел называется *левосторонним пределом функции* f(x) в точке x=a.  
Аналогично, символом lim

x→a+0

 обозначается правосторонний предел, в котором переменная x, приближаясь к a, принимает значения x>a. Соответствующий предел

f(x) называется *правосторонним пределом функции* f(x) в точке x=a.  
Отметим, что двусторонний предел существуют лишь тогда, когда существуют оба односторонних предела, которые равны друг другу.

**С методикой вычисления предела функции вы можете ознакомиться в видеоуроке: https://www.youtube.com/watch?v=fa7kuQajmU4.**

**6) Повторим, обобщим и систематизируем понятие производной (записать в конспект выделенное, таблицу и примеры).**

**Определение: производной функцииhttp://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image002_0001.gif в точке http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image106.gif называется предел отношения приращения функции http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image108.gif к вызвавшему его приращению аргумента http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image023_0003.gif в этой точке при http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image075_0000.gif. Или коротко:  
Определение функции в точке**

**Если данный предел конечен, то функция http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image002_0002.gif является дифференцируемой в точке http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image106_0000.gif.**

**Функция дифференцируема на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.**

К появлению понятия производной может привести решение некоторых практических задач.

Самыми известными среди них является задача о построении касательной к графику функцииhttp://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image002_0002.gifв точке http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image106_0000.gif, которую решил Готфрид Лейбниц, и задача о нахождении скорости материальной точки при прямолинейном и равномерном движении, которую решил Исаак Ньютон.

В общем, **производная - это скорость изменения любого процесса.**

Для функции http://mathprofi.ru/i/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi_clip_image002_0002.gifпроизводную будем обозначать у' или f '(x).

Производную элементарной функции можно найти, пользуясь определением производной. Но это слишком сложное и трудоёмкое решение.

**Поэтому для вычисления производной мы будем применять в начале правила дифференцирования:**

|  |
| --- |
| **1.** |
| **2.** |
| **3.** |
| **4.** |
| **5.** |

**а затем таблицу производных элементарных функций:**

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** | **12.** |
| **2.** | **13.** |
| **3.** | **14.** |
| **4.** | **15.** |
| **5.**  **()' =** | **16.** |
| **6.** | **17.** |
| **7.** | **18.** |
| **8.** | **19.** |
| **9.** | **20.** |
| **10.** | **21.** |
| **11.** | **22.** |

**Пример 4.** Вычислить производные элементарных функций:

1. Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image028.gif

Смотрим в таблицу производных. Производная косинуса там есть, но у нас http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image030.gif.

Решаем:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image032.gif

Самое время использовать правило 1, выносим постоянный множитель за знак производной:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image034.gif

А теперь по таблице:

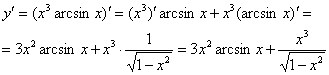
http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image036.gif

Ну и результат желательно немного «причесать» – ставим минус на первое место, заодно избавляясь от скобок:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image038.gif.

**Пример 5.** Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image062.gif

Здесь у нас произведение двух функций, зависящих от http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image064.gif.  
Сначала применяем 3 правило, а затем таблицу производных:

****

**Пример 6.** Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image068.gif

В данной функции содержится сумма http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image070.gif и произведение двух функций –  квадратного трехчлена http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image072.gif  и логарифма http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image074.gif. Со школы мы помним, что умножение и деление имеют приоритет перед сложением и вычитанием.

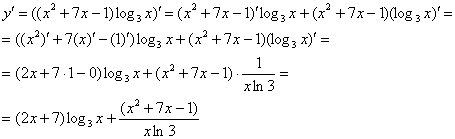
Здесь всё так же. **СНАЧАЛА** мы используем правило дифференцирования произведения 3:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image076.gif

Теперь для скобки http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image078.gif используем два первых правила:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image080.gif

В результате применения правил дифференцирования под штрихами у нас остались только элементарные функции, по таблице производных получаем:



**Пример 7.** Найти производную функции**http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image091.gif**

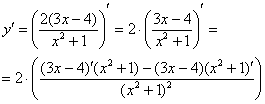
Чего здесь только нет – сумма, разность, произведение, дробь…. С чего бы начать?! Есть сомнения, нет сомнений, но, **В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ** для начала рисуем скобочки и справа вверху ставим штрих:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image093.gif

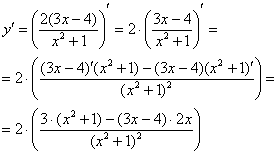
Теперь смотрим на выражение в скобках, как бы его упростить? В данном случае замечаем множитель, который согласно первому правилу целесообразно вынести за знак производной:

http://mathprofi.ru/f/kak_naiti_proizvodnuju_clip_image095.gifЗаодно избавляемся от скобок в числителе, которые теперь не нужны.  
Вообще говоря, постоянные множители при нахождении производной можно и не выносить, но в этом случае они будут «путаться под ногами», что загромождает и затрудняет решение.

Смотрим на наше выражение в скобках. У нас есть сложение, вычитание и деление. Со школы мы помним, что деление выполняется в первую очередь. И здесь – сначала применяем правило дифференцирования частного:

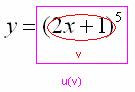


Таким образом, наша страшная производная свелась к производным двух простых выражений. Применяем первое и второе правило, здесь это сделаем устно, надеюсь, Вы уже немного освоились в производных:

****

**Пример 8.** Найти производную функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image053.gif

Как всегда записываем:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image055.gif

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image057.gif при http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image023_0000.gif. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image059.gif, значит, многочлен http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image061.gif – и есть внутренняя функция:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image063.jpg  
И, только потом выполняется возведение в степень http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image065.gif, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:  
  
Согласно формуле http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image002_0002.gif, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image070.gif. Повторяем еще раз: **любой табличный шаблон справедлив не только для «икс», но и для любой дифференцируемой функции**http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image008_0002.gif. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции  http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image002_0003.gif следующий:

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image072.gif

Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image035_0000.gif, внутренняя функция http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image008_0003.gif у нас не меняется:  
http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image076.jpg  
Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

http://mathprofi.ru/f/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii_clip_image078.gif

**7) Изучение нового материала. Рассмотрим технику дифференцирования неявной функции (записать в конспект).**

Рассмотрим другую функцию: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image012.gif , которая задана неявно.

Здесь переменные http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image004_0002.gif и http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0002.gif расположены «вперемешку». Причем **никакими способами невозможно** выразить «игрек» только через «икс».

В курсе математического анализа доказано, что неявная функция **существует** (однако не всегда), у неё есть график (точно так же, как и у «нормальной» функции). У неявной функции точно так же **существует** первая производная, вторая производная и т.д.

Все правила дифференцирования, таблица производных элементарных функций остаются в силе. Разница в одном своеобразном моменте, который мы рассмотрим прямо сейчас.

**Пример 9.**

Найти производную от функции, заданной неявно http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image012_0002.gif

1) На первом этапе навешиваем штрихи на обе части:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image020.gif

2) Используем правила дифференцирования:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image022.gif

3) Непосредственное дифференцирование.  
Как дифференцировать http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image024.gif и http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image026.gif совершенно понятно. Что делать там, где под штрихами есть «игреки»?

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image028.gif – просто до безобразия, производная от функции равна её производной: http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image030.gif.

Как дифференцировать http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image032.gif  
Здесь у нас **сложная функция**. Почему? Вроде бы под синусом всего одна буква «игрек». Но, дело в том, что всего одна буква «игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ**. Таким образом, синус – внешняя функция, http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0003.gif – внутренняя функция. Используем правило дифференцирования сложной функции http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image035.gif:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image037.gif

Произведение дифференцируем по обычному правилу http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image039.gif:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image041.gif

Обратите внимание, что http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image043.gif – тоже сложная функция, **любой «игрек с наворотами» – сложная функция**:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image045.gif

Само оформление решения должно выглядеть примерно так:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image047.gif  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image049.gif  
Если есть скобки, то раскрываем их:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image051.gif

4) В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом. В правую часть – переносим всё остальное:  
http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image053.gif

5) В левой части выносим производную http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image055.gif за скобки:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image057.gif

6) И по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части:

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image059.gif

**8)** **Изучение нового материала. Рассмотрим технику дифференцирования функции заданной параметрически (записать в конспект).**

Если функция y = f(x) задана параметрически в виде , то её производная находится по формуле

**Пример 10.**

Найти производную функции .

Найдём производные функций и по переменной t отдельно:

= = 20 - , (производная разности равна разности производных,4 умножили на 5 и понизили степень на 1 по формуле производной степенной функции, минус переписали, 3 умножили на 6 и понизили степень на 1, производная числа равна о).

=( )' = 4∙(-) +2∙ (производная суммы равна сумме производных, 4 переписали и умножили на производную косинуса по таблице, плюс переписали, 2 переписали и умножили на производную синуса по таблице) = - 4∙ +2∙.

Теперь найдём производную всей функции по формуле:

= . Ничего не упрощается. Это ответ.

**9) Домашнее задание: изучить и составить конспект, решить задание:**

**№1.**

**Найти производные функций:**