|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Место занятия в расписании** | **Тема** | **Цели** | **Задачи** | **Контрольные вопросы и задания** | **Д/з** |
| Дата | 08.11.21 | **Функция одной переменной. Граница функции. Понятие производной и техника дифференцирования.**  | Дидактическая | Обобщить систематизировать и расширить основные понятия функции одной переменной, границы функции, понятие производной функции одной переменной, продолжить формирование умений и навыков решения задач на функцию одной переменной, вычисления производной функции одной переменной. | 1) Обобщить систематизировать и расширить теоретические знания о функции одной переменной и её границе.2) Рассмотреть примеры решения задач в рамках данной темы.3) Обобщить систематизировать и расширить теоретические знания о производной функции одной переменной.4) Продолжить формирование умений и навыков решения задач в рамках данной темы. | 1) Как определяется и как задается функция?2) По какой переменной находится область определения?3) Какие по виду бывают функции?4) Какие основные свойства функции вы знаете?5) Как определяется граница функции и когда она существует?6) | **Изучить и составить конспект, решить задание:****№1.****Найти производные функций:**$\left\{\begin{matrix}х=5^{t}\\y= -3t^{7}+4t\end{matrix}\right. $ $\left\{\begin{matrix}х=tgt\\y=log\_{4}t\end{matrix}\right.$ |
| Группа | 2ТО | Развивающая | Развивать логическое и пространственное мышление. |
| Пара | IV | Воспитательная | Воспитывать любознательность и самостоятельность. |
| № занят. | 21-22(объединяются занятия №21 и №22) |

Подтвердите своё присутствие на занятии. Составьте конспект в соответствии с требованиями при помощи опорного конспекта занятия и учебника Элементы высшей математики/ Г.В.Григорьев и др. - М.: ИЦ Академия, 2014 г. - 320 с. (ссылка на электронный учебник: https://cloud.mail.ru/public/buNn/ijFYgVJ6h). Фото конспекта отправьте на почту **elenabragina7@gmail.com** до 08.11.21 включительно. Работа должна быть выполнена в рамках рабочего времени, отведенного на занятие по математике. **Чтобы все формулы и символы открывались, необходимо файл скачать на рабочий стол.**

**08.11**

**Функция одной переменной. Граница функции. Понятие производной и техника дифференцирования.**

**1) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков и блочное закрепление. Определим функцию одной переменной и способы её задания (записать конспект).**

**Определение.** Функция одной переменной - это зависимость переменной у от переменной х, при которой каждому значению переменной х ставиться в соответствие единственное значение переменной у.

Алгебраически эту зависимость можно задать формулой у = f(х), где

х - независимая переменная или аргумент,

у - зависимая переменная или функция,

f - формула с переменной х.

В качестве аргумента и функции можно использовать и другие буквы.

**Функцию можно задать:**

- аналитически или алгебраически (формулой),

- таблично (таблицей значений аргумента и функции),

- графически (графиком),

- словесно (зависимость описывается при помощи слов).

Рассмотрим несложные примеры на определение и задание функции.

**Пример 1.**

Найти f(1,2), если f(х) = $\frac{2х-3}{4+6х}$.

Решение.

Подставим в формулу функции вместо переменной х значение 1,2:

f(1,2) = $\frac{2∙1,2-3}{4+6∙1,2}$ = $\frac{2,4-3}{4+7,2}$ = $\frac{-0,6}{11,2}$ = (поставим минус перед дробью, умножим числитель и знаменатель на 10) = - $\frac{6}{112}$ = (сократим на 2) = - $\frac{3}{56}$.

**Пример 2.**

Найти f($\frac{1}{7}$), если f(х) = $\frac{4х+1}{2-2х}$.

Решение.

Подставим в формулу функции вместо переменной х значение $\frac{1}{7}$:

f($\frac{1}{7}$) = $\frac{4∙\frac{1}{7}+1}{2-2∙\frac{1}{7}}$ = $\frac{\frac{4}{7}+1}{2-\frac{2}{7}}$ = (представим целые числа в виде дроби со знаменателем 7) = $\frac{\frac{4}{7}+\frac{7}{7}}{\frac{14}{7}-\frac{2}{7}}$ = $\frac{\frac{11}{7}}{\frac{12}{7}}$ = (сократим на знаменатели) = $\frac{11}{12}$.

**2) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков и блочное закрепление. Определим область определения функции и область её значений (записать в конспект).**

Область определения D и область значений Е являются важнейшими характеристиками или свойствами функции. Определим их.

**Определение.** Областью определения D функции у = f(х) называется множество значений переменной х, при которых функция существует (считается).

**Определение.** Областью значений Е функции у = f(х) называется множество значений переменной у, которые она принимает.

При нахождении области определения функции учитываются особенности формулы функции и её определение, применяются умения и навыки решения уравнений, неравенств, систем.

**Пример 3.**

Найти область определения функции у = $log\_{х}(4х-8)$.

Решение.

Функция логарифмическая и по определению мы знаем, что основание логарифма >0 и ≠ 1, а выражение под знаком логарифма >0. Составим систему условий, при которых функция существует:

**х**>0 **х**>0 **х**>0

х≠ 1 х≠ 1 х≠ 1

4х-8>0 4х>8 х>2

Изобразим промежуток, соответствующий общему решению системы:

 **0 1 2 х**

**D(у) = (2;+∞).**

**3) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков. Определим виды функций (записать в конспект).**

Функции могут быть алгебраическими и трансцендентными.

**Определение.** Функция называется алгебраической, если её формула составлена при помощи алгебраических действий.

В противном случае функцию называют трансцендентной.

К трансцендентным функциям относятся функции, содержащие логарифмы и тригонометрические функции.

Функции могут быть явными (когда в формуле функция выражена через аргумент), неявными (когда в формуле функция не выражена через аргумент), заданными параметрически в виде х = f(t), y = g(t)).

**4) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков. Рассмотрим основные свойства функции (ознакомиться).**

**К основным свойствам функции относятся следующие свойства:**

 **1. Нули функции**.

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

**2. Промежутки знакопостоянства функции**.

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

**3. Монотонность функции**.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

**4. Четность (нечетность) функции**.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **х** из области определения выполняется равенство **f(-x) = f(x)**. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **х** из области определения справедливо равенство **f(-x) = - f(x**). График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

**5. Ограниченная и неограниченная функции**.

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что |f(x)| ≤ M для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

**6. Периодичность функции**.

Функция f(x) - периодическая, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции имеет место: f(x+T) = f(x). Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

**5) Обобщение, систематизация, расширение теоретических знаний и практических умений и навыков. Определим границу функции (записать в конспект).**

**Определение (по Коши).** Пусть функция f(x) определена на некотором открытом интервале X, содержащем точку x=a. (При этом не требуется, чтобы значение f(a) было обязательно определено.)Число А называется *пределом* функции f(x) при x→a, если для каждого ε>0 существует такое число δ>0, что|f(x)−А|<ε,при условии0<|x−a|<δ.Данное определение предела известно как ε−δ− определение или определение *Коши*.

Обозначается 

Символом lim

 x→a−0

обозначается левосторонний предел, в котором переменная x, приближаясь к a, принимает значения x<a. Соответствующий предел называется *левосторонним пределом функции* f(x) в точке x=a.
Аналогично, символом lim

 x→a+0

 обозначается правосторонний предел, в котором переменная x, приближаясь к a, принимает значения x>a. Соответствующий предел

f(x) называется *правосторонним пределом функции* f(x) в точке x=a.
Отметим, что двусторонний предел существуют лишь тогда, когда существуют оба односторонних предела, которые равны друг другу.

**С методикой вычисления предела функции вы можете ознакомиться в видеоуроке: https://www.youtube.com/watch?v=fa7kuQajmU4.**

**6) Повторим, обобщим и систематизируем понятие производной (записать в конспект выделенное, таблицу и примеры).**

**Определение: производной функции в точке  называется предел отношения приращения функции  к вызвавшему его приращению аргумента  в этой точке при . Или коротко:
**

**Если данный предел конечен, то функция  является дифференцируемой в точке .**

**Функция дифференцируема на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.**

К появлению понятия производной может привести решение некоторых практических задач.

Самыми известными среди них является задача о построении касательной к графику функциив точке , которую решил Готфрид Лейбниц, и задача о нахождении скорости материальной точки при прямолинейном и равномерном движении, которую решил Исаак Ньютон.

В общем, **производная - это скорость изменения любого процесса.**

Для функции производную будем обозначать у' или f '(x).

Производную элементарной функции можно найти, пользуясь определением производной. Но это слишком сложное и трудоёмкое решение.

**Поэтому для вычисления производной мы будем применять в начале правила дифференцирования:**

|  |
| --- |
| **1.**  |
| **2.**  |
| **3.**  |
| **4.**  |
| **5.**  |

**а затем таблицу производных элементарных функций:**

|  |  |
| --- | --- |
| **1.**  | **12.**  |
| **2.**  | **13.**  |
| **3.**  | **14.**  |
| **4.**  | **15.**  |
| **5.** **(**$\sqrt{x}$**)' =** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | **16.**  |
| **6.**  | **17.**  |
| **7.**  | **18.**  |
| **8.**  | **19.**  |
| **9.**  | **20.**  |
| **10.**  | **21.**  |
| **11.**  | **22.**  |

**Пример 4.** Вычислить производные элементарных функций:

1. Найти производную функции 

Смотрим в таблицу производных. Производная косинуса там есть, но у нас .

Решаем:



Самое время использовать правило 1, выносим постоянный множитель за знак производной:



А теперь по таблице:



Ну и результат желательно немного «причесать» – ставим минус на первое место, заодно избавляясь от скобок:

.

**Пример 5.** Найти производную функции 

Здесь у нас произведение двух функций, зависящих от .
Сначала применяем 3 правило, а затем таблицу производных:

****

**Пример 6.** Найти производную функции 

В данной функции содержится сумма  и произведение двух функций –  квадратного трехчлена   и логарифма . Со школы мы помним, что умножение и деление имеют приоритет перед сложением и вычитанием.

Здесь всё так же. **СНАЧАЛА** мы используем правило дифференцирования произведения 3:



Теперь для скобки  используем два первых правила:



В результате применения правил дифференцирования под штрихами у нас остались только элементарные функции, по таблице производных получаем:



**Пример 7.** Найти производную функции****

Чего здесь только нет – сумма, разность, произведение, дробь…. С чего бы начать?! Есть сомнения, нет сомнений, но, **В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ** для начала рисуем скобочки и справа вверху ставим штрих:



Теперь смотрим на выражение в скобках, как бы его упростить? В данном случае замечаем множитель, который согласно первому правилу целесообразно вынести за знак производной:

Заодно избавляемся от скобок в числителе, которые теперь не нужны.
Вообще говоря, постоянные множители при нахождении производной можно и не выносить, но в этом случае они будут «путаться под ногами», что загромождает и затрудняет решение.

Смотрим на наше выражение в скобках. У нас есть сложение, вычитание и деление. Со школы мы помним, что деление выполняется в первую очередь. И здесь – сначала применяем правило дифференцирования частного:



Таким образом, наша страшная производная свелась к производным двух простых выражений. Применяем первое и второе правило, здесь это сделаем устно, надеюсь, Вы уже немного освоились в производных:

****

**Пример 8.** Найти производную функции 

Как всегда записываем:


Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения  при . Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: , значит, многочлен  – и есть внутренняя функция:

И, только потом выполняется возведение в степень , следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

Согласно формуле , сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: . Повторяем еще раз: **любой табличный шаблон справедлив не только для «икс», но и для любой дифференцируемой функции**. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции   следующий:



Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции , внутренняя функция  у нас не меняется:

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:



**7) Изучение нового материала. Рассмотрим технику дифференцирования неявной функции (записать в конспект).**

Рассмотрим другую функцию:  , которая задана неявно.

Здесь переменные  и  расположены «вперемешку». Причем **никакими способами невозможно** выразить «игрек» только через «икс».

В курсе математического анализа доказано, что неявная функция **существует** (однако не всегда), у неё есть график (точно так же, как и у «нормальной» функции). У неявной функции точно так же **существует** первая производная, вторая производная и т.д.

Все правила дифференцирования, таблица производных элементарных функций остаются в силе. Разница в одном своеобразном моменте, который мы рассмотрим прямо сейчас.

**Пример 9.**

Найти производную от функции, заданной неявно 

1) На первом этапе навешиваем штрихи на обе части:


2) Используем правила дифференцирования:


3) Непосредственное дифференцирование.
Как дифференцировать  и  совершенно понятно. Что делать там, где под штрихами есть «игреки»?

 – просто до безобразия, производная от функции равна её производной: .

Как дифференцировать 
Здесь у нас **сложная функция**. Почему? Вроде бы под синусом всего одна буква «игрек». Но, дело в том, что всего одна буква «игрек» – **САМА ПО СЕБЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ**. Таким образом, синус – внешняя функция,  – внутренняя функция. Используем правило дифференцирования сложной функции :



Произведение дифференцируем по обычному правилу :



Обратите внимание, что  – тоже сложная функция, **любой «игрек с наворотами» – сложная функция**:



Само оформление решения должно выглядеть примерно так:


Если есть скобки, то раскрываем их:


4) В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом. В правую часть – переносим всё остальное:


5) В левой части выносим производную  за скобки:



6) И по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части:



**8)** **Изучение нового материала. Рассмотрим технику дифференцирования функции заданной параметрически (записать в конспект).**

Если функция y = f(x) задана параметрически в виде $\left\{\begin{matrix}х=х(t)\\y=y(t)\end{matrix}\right.$ , то её производная находится по формуле $\frac{у'\_{t}}{x'\_{t}}$

**Пример 10.**

Найти производную функции $\left\{\begin{matrix}х=4t^{5}-3t^{6 }+5\\y=4\cos(x+2\sin(x))\end{matrix}\right.$.

Найдём производные функций$ х(t)$ и $y(t)$ по переменной t отдельно:

$х'(t)$ = $\left(4t^{5}-3t^{6 }+5\right)'$ = 20$t^{4}$ - $18t^{5 }$, (производная разности равна разности производных,4 умножили на 5 и понизили степень на 1 по формуле производной степенной функции, минус переписали, 3 умножили на 6 и понизили степень на 1, производная числа равна о).

$y'(t)$ =( $4\cos(x+2\sin(x))$)' = 4∙(-$\sin(x)$) +2∙$\cos(х)$ (производная суммы равна сумме производных, 4 переписали и умножили на производную косинуса по таблице, плюс переписали, 2 переписали и умножили на производную синуса по таблице) = - 4∙$\sin(x)$ +2∙$\cos(х)$.

Теперь найдём производную всей функции по формуле:

$\frac{у'\_{t}}{x'\_{t}}$ = $\frac{20t^{4} - 18t^{5 }}{- 4∙\sin(x) +2∙\cos(х)}$ . Ничего не упрощается. Это ответ.

**9) Домашнее задание: изучить и составить конспект, решить задание:**

**№1.**

**Найти производные функций:**

$\left\{\begin{matrix}х=5^{t}\\y= -3t^{7}+4t\end{matrix}\right. $ $\left\{\begin{matrix}х=tgt\\y=log\_{4}t\end{matrix}\right.$